# MATHÉMATIQUES

**(Option générale)**

---

PREMIÈRE COMPOSITION

DURÉE : 3 heures

---

NOTATIONS :

*a.* Dans tout le problème, le corps de base est $\mathbb{R}$.

*b.* On rappelle que $0! = 1$.

*c.* On pose, dans tout le problème, lorsque $x \neq 1$ :

$$f(x) = \frac{e^x}{1 - x}.$$

$f^{(n)}$ désigne la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $f$ ; par convention $f^{(0)} = f$.

*d.* On identifie, par abus de langage, lorsque c'est utile, un polynôme réel et la fonction polynôme associée. Si P est un polynôme, le polynôme dérivé d'ordre $k$ est noté $P^{(k)}$; par convention $P^{(0)} = P$.

$P^{(1)}$ est également noté $P'$, selon l'usage.



PARTIE 1

1.1. Étudier les variations de $f$ et construire sa représentation graphique (C).

Préciser, selon les valeurs de $x$, le sens de concavité de (C).

Soit l'intégrale :

$$I = \int_{-\infty}^{0} f(x)\, dx.$$

Montrer l'existence de I et démontrer l'inégalité stricte :

$$0 < I < 1.$$

1.2. On pose :

$$S_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!}.$$

Montrer que $f$ admet le développement en série entière défini par l'égalité :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n.$$

Quel est le rayon de convergence de cette série ?

Préciser la nature de la série aux bornes de l'intervalle de convergence.

1.3. On pose :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k S_k.$$

Montrer, en groupant convenablement les termes de cette somme, que les suites définies par :

$$V_p = u_{2p},$$

$$W_p = u_{2p+1},$$

sont convergentes. Déterminer leurs limites respectives.

Comparer $f(-1)$ et $\lim_{p \to +\infty} \frac{1}{2}(v_p + w_p)$.

**Tournez la page S. V. P.**

page 224 1986 Concours Commun INA et ENSA Math 1

## Partie 2

*Cette partie est très largement indépendante de la partie 1.*

2.1. Montrer que pour tout $n$ élément de $\mathbb{N}$ :

$$f^{(n)}(x) = \frac{e^x P_n(x)}{(1-x)^{n+1}},$$

où $P_n$ est un polynôme de degré $n$ dont on précisera le terme de plus haut degré.

Exprimer $P_{n+1}$ en fonction de $P_n$ et de $P'_n$ et calculer $P_n(1)$.

2.2. *a.* Soit $\Phi$ une fonction réelle $n$ fois dérivable sur un intervalle $]u, v[$ arbitraire, $a$ et $b$ deux réels donnés. Montrer que si on pose :

$$\Psi(x) = (ax + b)\,\Phi(x),$$

la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $\Psi$, notée $\Psi^{(n)}$, est liée à celle de $\Phi$, notée $\Phi^{(n)}$, par la formule :

$$\Psi^{(n)}(x) = (ax + b)\,\Phi^{(n)}(x) + na\,\Phi^{(n-1)}(x) \quad (n \geqslant 1).$$

*b.* Montrer que, si $x \neq 1$, $f$ vérifie l'égalité :

$$(x-1)f'(x) - (x-2)f(x) = 0.$$

En déduire une relation entre $P_{n+1}$, $P_n$ et $P_{n-1}$.

Établir une relation très simple entre $P'_n$ et $P_{n-1}$.

Calculer $P_n^{(k)}(1)$ si $0 \leqslant k \leqslant n$.

Appliquant la formule de Taylor à $P_n$ sur un intervalle dont l'une des bornes est 1, étudier, $x$ étant fixe, l'existence de $\lim_{n \to +\infty} \frac{P_n(x)}{n!}$ et calculer éventuellement cette limite.

2.3. On introduit les coefficients de $P_n$ en posant :

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} p_{n,k}\, x^k.$$

Calculer, en fonction de $n$, $p_{n,0}$ et $p_{n,1}$, et trouver entre $p_{n,0}$ et $p_{n,1}$ une relation simple indépendante de $n$.

2.4. Déduire de ce qui précède une méthode de calcul de proche en proche des polynômes $P_n$.

Calculer par ce procédé $P_2$, $P_3$, $P_4$. Retrouver l'expression de $P_2$ obtenue en 1.1 à l'occasion du calcul de $f''(x)$.



## Partie 3

3.1. On suppose que, $p_0$ désignant un élément de $\mathbb{N}$, le polynôme $P_{2p_0}$ (les notations étant celles de la partie 2) n'a aucun zéro réel. Montrer que $P_{2p_0+1}$ admet un zéro réel unique (noté $\alpha_{p_0}$), simple, tel que $\alpha_{p_0} > 1$ et en déduire que $P_{2p_0+2}$ n'a aucun zéro réel.

Que peut-on en déduire pour les zéros des polynômes $P_n$ ?

Pour tout $p$ élément de $\mathbb{N}$, on note $\alpha_p$ le zéro de $P_{2p+1}$.

Montrer par récurrence que $\alpha_p \leqslant 2p + 2$ et que de plus $\alpha_p < 2p + 2$ si $p \geqslant 1$. En déduire que la suite $(\alpha_p)$ est strictement croissante.

Montrer que cette suite n'est pas bornée (on pourra utiliser le résultat final de 2.2).

Que peut-on en conclure pour la suite $(\alpha_p)$ ?